

# PRIMARITE DE $L^p(l_r)$ , $1 < p, r < \infty$

BY  
M. CAPON

## ABSTRACT

In this article we show that if  $1 < p, r < \infty$ , the space  $L^p(l_r)$  is primary. If we let  $(h_k)$  be the Haar system in  $L^p$  and  $(e_i)$  the usual base of  $l_r$ , we give sufficient conditions on a subsequence of  $(h_k \otimes e_i)_{k \geq 1, i \geq 1}$  for it to generate a space isomorphic to  $L^p(l_r)$ . We deduce the primarity of  $L^p(l_r)$ .

## Introduction

Rappelons qu'un espace de Banach  $X$  est primaire si pour toute projection continue  $P$  de  $X$  dans lui-même, l'un des deux espaces  $PX$  ou  $(I - P)(X)$  est isomorphe à  $X$ .

Ce travail généralise un résultat de Gamlen et Gaudet [2] qui ont montré qu'une sous-suite de la base de Haar dans  $L^p$ ,  $1 < p < \infty$ , engendre un espace isomorphe à  $l_p$  ou à  $L^p$ . Nous utilisons ensuite une technique analogue à celle de Alspach, Enflo et Odell [1] pour montrer que  $L^p(l_r)$  est primaire pour  $1 < p < \infty$  et  $1 < r < \infty$ . Dans toute la suite  $(h_k)_{k \geq 1}$  désignera la base de Haar de  $L^p$ , c'est-à-dire la suite définie par

$$h_1 = 1,$$

$$h_{2^n+k} = \prod_{[(2k-2)/2^{n+1}, (2k-1)/2^{n+1}[} - \prod_{[(2k-1)/2^{n+1}, 2k/2^n[} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, 2^n.$$

La base canonique de  $l_r$  sera notée  $(e_i)_{i \geq 1}$ .

Si  $(x_n)_{n \geq 1}$  est une suite basique dans un Banach  $X$ , alors  $x_n^*$  désigne la suite biorthogonale, c'est-à-dire les éléments de  $[(x_n)]^*$  qui vérifient

$$x_n^*(x_j) = \delta_{nj}.$$

En utilisant le théorème de Hahn Banach on peut supposer que  $x_n^*$  est un élément de  $X^*$ .

Enfin si  $h$  est une fonction définie sur  $[0, 1]$ ,  $S(h)$  désigne le support de  $h$ , c'est-à-dire  $S(h) = \{t/h(t) \neq 0\}$ .

Received July 15, 1979 and in revised form February 12, 1980

# I. Etude des sous suites de la base de $L^p(l_r)$

Dans toute cette partie  $p$  et  $r$  sont fixés. La suite  $(h_k \otimes e_i)_{k \geq 1, i \geq 1}$  dans  $L^p(l_r)$  engendre un espace dense dans  $L^p(l_r)$ .

Le symbole  $A \approx B$  signifie que le rapport des quantités  $A$  et  $B$  est majoré et minoré par des constantes qui ne dépendent que de  $p$  et  $r$ .

LEMME I.0. La suite  $(h_k \otimes e_i)_{k \geq 1, i \geq 1}$  est une base inconditionnelle de  $L^p(l_r)$ .

DÉMONSTRATION. Nous démontrerons d'abord que si  $(x_k)$  est une suite dans  $l_r$  alors la suite  $(h_k \otimes x_k)$  est inconditionnelle dans  $L^p(l_r)$ . D'après la remarque faite par Pisier en [3], il suffit de le montrer pour  $p = r$ . Posons alors  $x_k = \sum_i \lambda_{ki} e_i$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_k h_k \otimes x_k \right\|_{L^r(l_r)}^r &= \int \left| \sum_k \lambda_{ki} h_k(t) \right|^r dt \\ &= \sum_i \int \left| \sum_k \lambda_{ki} h_k(t) \right|^r dt \\ &\approx \sum_i \int \left| \sum_k \pm \lambda_{ki} h_k(t) \right|^r dt \\ &= \left\| \sum_k \pm h_k \otimes x_k \right\|_{L^r(l_r)}^r. \end{aligned}$$

Considérons maintenant la suite  $(h_k \otimes e_i)$  dans  $L^p(l_r)$  et des scalaires  $\alpha_{ki}$  presque tous nuls. Nous allons montrer que  $\Delta = \left\| \sum_{k,i} \alpha_{ki} h_k \otimes e_i \right\|$  ne dépend que du carré des coefficients  $\alpha_{ki}$ ; ceci montrera l'inconditionnalité

$$\Delta^p = \int \left\| \sum_k h_k(t) \otimes x_k \right\|_{l_r}^p dt \quad \text{où } x_k = \sum_i \alpha_{ki} e_i.$$

D'après la remarque du début on a, si  $\varepsilon_k(\cdot)$  désigne la suite de Rademacher

$$\Delta^p \approx \iint \left\| \sum_k h_k(t) \varepsilon_k(u) \otimes x_k \right\|_{l_r}^p du dt.$$

Fixons maintenant  $t$  et utilisons les inégalités de Kahane [4]

$$E_t = \int \left\| \sum_k h_k(t) \varepsilon_k(u) \otimes x_k \right\|_{l_r}^p du \approx \left( \int \left\| \sum_k h_k(t) \varepsilon_k(u) \otimes x_k \right\|_{l_r}^r du \right)^{p/r}$$

donc

$$E_t^{r/p} \approx \sum_i \int \left| \sum_k \alpha_{ki} h_k(t) \varepsilon_k(u) \right|^r du.$$

On utilise alors les inégalités de Khintchine et on obtient

$$E_t^{r/p} \approx \sum_i \left( \sum_k \alpha_{ki}^2 h_k^2(t) \right)^{r/2}$$

donc

$$\Delta^p \approx \int E_t dt \approx \int \left( \sum_i \left( \sum_k \alpha_{ki}^2 h_k^2(t) \right)^{r/2} \right)^{p/r} dt. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

LEMME I.1. Soit  $(d_k^i)$  une suite de fonctions de  $L^p$  telle que la suite  $(d_k^i \otimes e_i)$  soit basique inconditionnelle, alors

$$\left\| \sum_{k,i} \alpha_{k,i} d_k^i \otimes e_i \right\|_{L^p(I_t)}^p \approx \int \left( \sum_i \left( \sum_k \alpha_{ki}^2 d_k^{i2}(t) \right)^{r/2} \right)^{p/r} dt.$$

En particulier si deux suites  $d_k^i$  de  $d_k^{i'}$  vérifient les hypothèses et en outre  $|d_k^i| = |d_k^{i'}|$ , alors les suites  $(d_k^i \otimes e_i)$  et  $(d_k^{i'} \otimes e_i)$  sont équivalentes.

DÉMONSTRATION. Posons  $\Delta = \left\| \sum_{k,i} \alpha_{k,i} d_k^i \otimes e_i \right\|_{L^p(I_t)}^p$ ,

$$\Delta = \int \left\| \sum_{k,i} \alpha_{k,i} d_k^i(t) \otimes e_i \right\|_{I_t}^p dt.$$

Désignons par  $\varepsilon_k(\cdot)$  la suite de Rademacher. Comme la suite est inconditionnelle on a

$$\Delta \approx \iint \left\| \sum_{k,i} \alpha_{k,i} \varepsilon_k(u) d_k^i(t) \otimes e_i \right\|_{I_t}^p dt du.$$

Fixons  $t$  et intégrons par rapport à  $u$ ; on peut en utilisant les inégalités de Kahane [4], écrire

$$S(t) = \int \left\| \sum_{k,i} \alpha_{k,i} \varepsilon_k(u) d_k^i(t) \otimes e_i \right\|_{I_t}^p du \approx \left( \int \left\| \sum_{k,i} \alpha_{k,i} \varepsilon_k(u) d_k^i(t) \otimes e_i \right\|_{I_t}^r du \right)^{p/r},$$

$$S(t) \approx \left( \int \sum_i \left| \sum_k \alpha_{k,i} \varepsilon_k(u) d_k^i(t) \right|^r du \right)^{p/r}.$$

On applique maintenant les inégalités de Khintchine et on obtient

$$S(t) \approx \left( \sum_i \left( \sum_k \alpha_{k,i}^2 d_k^{i2}(t) \right)^{r/2} \right)^{p/r},$$

$$\Delta \approx \int \left( \sum_i \left( \sum_k \alpha_{k,i}^2 d_k^{i2}(t) \right)^{r/2} \right)^{p/r} dt. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

COROLLAIRE I.2. Si deux suites  $d_k^i$  et  $d_k^{i'}$  sont dans  $L^\infty$  et telles que

(a)  $\{d_k^i \otimes e_i\}$  et  $\{d_k^{i'} \otimes e_i\}$  sont des suites inconditionnelles,

(b)  $|d_k^{i'}(t)| = \lambda_{ki} |d_k^i(t)|$  sauf sur un ensemble de mesure  $\varepsilon_{ki}$  et

$$\sum_{i,k} \varepsilon_{ki}^{1/p} (\|d_k^i\|_{L^\infty} \|d_k^{i*}\| + \|d_k^{i'}\|_{L^\infty} \|d_k^{i' \prime}\|) + |1 - \lambda_{ki}| \|d_k^i\| \|d_k^{i*}\| < 1$$

alors les suites basiques considérées sont équivalentes dans  $L^p(I_r)$ .

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord  $\lambda_{ki} = 1$  et posons

$$E_{ik} = \{t / |d_k^i(t)| = |d_k^{i'}(t)|\}.$$

On a

$$\|d_k^i \otimes e_i - d_k^i \Pi_{E_{ik}} \otimes e_i\| \leq \|d_k^i\|_{L^\infty} \varepsilon_{ik}^{1/p}.$$

D'après l'hypothèse (b) on a

$$\sum_{i,k} \|d_k^i \otimes e_i - d_k^i \Pi_{E_{ik}} \otimes e_i\| \|d_k^{i*} \otimes e_i^*\| < 1.$$

Les suites  $\{d_k^i \otimes e_i\}$  et  $\{d_k^i \Pi_{E_{ik}} \otimes e_i\}$  sont donc équivalentes. De même les suites  $\{d_k^{i'} \otimes e_i\}$  et  $\{d_k^{i'} \Pi_{E_{ik}} \otimes e_i\}$  sont équivalentes, donc en appliquant le lemme I.1 aux suites  $\{d_k^i \Pi_{E_{ik}} \otimes e_i\}$  et  $\{d_k^{i'} \Pi_{E_{ik}} \otimes e_i\}$  on en déduit le corollaire dans ce cas. Si  $\lambda_{ki} \neq 1$ , posons  $z_k^i = \lambda_{ki} d_k^i$ , alors  $z_k^{i*} = (1/\lambda_{ki}) d_k^{i*}$ . Les suites  $\{z_k^i \otimes e_i\}$  et  $\{d_k^{i'} \otimes e_i\}$  sont équivalentes car

$$\sum_{k,i} \varepsilon_{ki}^{1/p} \|z_k^i\|_{L^\infty} \|z_k^{i*}\| = \sum_{k,i} \varepsilon_{ki}^{1/p} \|d_k^i\|_{L^\infty} \|d_k^{i*}\|.$$

On peut donc appliquer la première partie de la démonstration. D'autre part:

$$\|z_k^i \otimes e_i - d_k^i \otimes e_i\| = |1 - \lambda_{ki}| \|d_k^i\|. \text{ Donc}$$

$$\sum_{k,i} \|z_k^i \otimes e_i - d_k^i \otimes e_i\| \|d_k^{i*} \otimes e_i^*\| < 1$$

d'après (b). On peut conclure que les suites  $\{z_k^i \otimes e_i\}$  et  $\{d_k^i \otimes e_i\}$  sont équivalentes, ce qui achève la démonstration.

Nous allons maintenant étudier l'espace engendré par une sous-suite  $(h_k \otimes e_i)_{i \geq 1, k \in \Phi_i}$ . Etant donnée une partie  $\Phi_i$  de  $\mathbb{N}$  nous poserons

$$\hat{\Phi}_i = \{t \in [0, 1] / h_k(t) \neq 0 \text{ pour une infinité de } k \text{ dans } \Phi_i\}.$$

THÉORÈME I.3. *L'espace engendré par la suite  $(h_k \otimes e_i)_{i \geq 1, k \in \Phi_i}$  est isomorphe à  $L^p(I_r)$  si l'une des deux hypothèses suivantes est réalisée.*

- (1) *Il existe une partie infinie  $M$  de  $\mathbb{N}$  telle que  $\bigcap_{i \in M} \hat{\Phi}_i$  soit de mesure positive.*
- (2) *Pour toute partie infinie  $M$  de  $\mathbb{N}$ ,  $\bigcap_{i \in M} \hat{\Phi}_i^c$  est de mesure nulle.*

DÉMONSTRATION. Nous allons d'abord nous placer dans l'hypothèse (1). Posons  $Z = [h_k \otimes e_i]_{i \geq 1, k \in \Phi_i}$ , d'après la méthode de décomposition de Pełczyński il suffit de montrer que  $Z$  contient un sous-espace complété

isomorphe  $L^p(l)$ , on peut donc supposer  $M = N$  et choisir un compact  $K$  de mesure positive dans  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \hat{\Phi}_i$ .

Nous allons énoncer plusieurs lemmes qui donnent des conditions suffisantes pour qu'une suite de  $L^p(l)$  engendre un sous-espace complété isomorphe à  $L^p(l)$  et nous construirons une suite dans  $Z$  qui vérifie ces conditions.

LEMME I.4. Soit  $(d_k)_{k \geq 1}$  une suite de fonctions de  $K$  dans  $\{-1, 1, 0\}$ . On suppose qu'il existe deux constantes positives  $K_1$  et  $K_2$  telles que

(a)  $d_1 = \Pi_K$ ,  $|d_2| = \Pi_K$ ,  $K_1 \leq \mu(K) \leq K_2$ .

(b) Si pour  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $m = 1, 2, \dots, 2^n$  on pose

$$D_{n, 2m-1} = S(d_{2^{n+m}}^+) \quad \text{et} \quad D_{n, 2m} = S(d_{2^{n+m}}^-)$$

alors  $D_{n, 2m-1} \cup D_{n, 2m} = D_{n-1, m}$  et  $K_1 \leq 2^{n+1} \mu(D_{n, j}) \leq K_2$ .

Alors la suite  $\{d_k \otimes e_i\}$  est équivalente à  $\{h_k \otimes e_i\}$  et l'espace  $U_0$  qu'elle engendre est identique à  $L^p(K, \mathcal{A}, l)$  où  $\mathcal{A}$  est la  $\sigma$ -algèbre engendrée par les  $D_{n, j}$ .

En effet  $L^p(K, \mathcal{A}, l)$  est engendré par les fonctions  $(d_k^+ \otimes e_i)$  et  $(d_k^- \otimes e_i)$ . En utilisant l'hypothèse (b) on voit facilement que l'opérateur  $T$  de  $L^p(l)$  dans  $U_0$ , défini par  $T(h_k \otimes e_i) = d_k \otimes e_i$  est un isomorphisme d'espace réticulé de  $L^p(l)$  sur  $U_0$ . L'espace  $U_0$ , contenu dans  $L^p(K, \mathcal{A}, l)$ , réticulé et contenant toutes les fonctions  $(d_k \otimes e_i)$  est donc identique à  $L^p(K, \mathcal{A}, l)$ . C.Q.F.D.

REMARQUE.  $U_0^*$  s'identifie à  $L^q(K, \mathcal{A}, l_s)$  et l'injection de  $U_0^*$  dans  $L^q(l_s)$  est une isométrie.

Soit maintenant  $U_1$  l'espace engendré par  $[d_k \otimes e_i]_{k \geq 2, i \geq 1}$ . En utilisant l'isomorphisme  $T$  on voit que  $U_1$  est isomorphe au sous-espace de  $L^p(l)$  formé des fonctions d'intégrales nulles. Il est facile de démontrer que ce dernier est isomorphe à  $L^p(l)$ . Si  $(d_k^*)$  désigne la suite biorthogonale de  $(d_k)$ , il est clair que la restriction à  $U_1$  de  $(d_k^* \otimes e_i^*)_{i \geq 1}$  est la suite biorthogonale de  $(d_k \otimes e_i)_{i \geq 1, k \geq 2}$  et engendre donc  $U_1^*$ . On a donc une injection canonique de  $U_1^*$  dans  $U_0^*$  définie par

$$j[(d_k^* \otimes e_i^*)_{i \geq 1}] = d_k^* \otimes e_i^*.$$

Soit  $\pi$  la projection naturelle de  $U_0$  sur  $U_1$ , qui est continue car la base de  $U_0$  est inconditionnelle. Comme pour tout fonction  $f$  de  $U_0$ ,  $f - \pi(f)$  est orthogonale à  $(d_k^* \otimes e_i^*)_{k \geq 2, i \geq 1}$ . On a

$$\langle \pi^* \varphi; f \rangle = \langle \varphi, \pi f \rangle = \langle j\varphi, \pi f \rangle = \langle j\varphi, f \rangle.$$

Donc

$$\pi^* = j.$$

Ce qui montre que  $j$  est continue car  $\pi$  l'est.

Ces deux remarques nous montrent que si  $\psi = \sum_{i \geq 1} \sum_{k \geq 2} \alpha_{ki} (d_k^* \otimes e_i^*)$  alors  $\|\psi\|_{U_1^*} \approx \|\psi\|_{L^q(I)}$ .

NOTATION. Nous appellerons suite bloc  $(b_k)$  une suite bloc de la base de Haar de la forme suivante

$$b_k = \sum_{j \in \sigma_k} h_j, \quad \text{avec } \sigma_k \cap \sigma_l = \emptyset \quad \text{et} \quad h_j h_l = 0$$

si  $i$  et  $j$  sont dans  $\sigma_k$  et  $i \neq j$ .

Si on pose  $h_k^* = b_k / \mu(S(b_k))$ , cela définit une suite de fonctions dans  $L^q = (L^p)^*$  et la restriction de ces formes linéaires à l'espace engendré par les  $(b_k)$  est la suite biorthogonale à  $(b_k)$ .

LEMME 1.5.  $K_1$  et  $K_2$  étant donnés, il existe des nombres  $(\varepsilon_k)_{k \geq 2}$  positifs tels que si  $(b_k)_{k \geq 2}$  est une suite bloc de la base de Haar qui vérifie

(a) la suite  $(d_k)_{k \geq 1}$  définie par  $d_1 = \Pi_K$  et  $d_2 = b_k \Pi_K$  pour  $k \geq 2$ , vérifie les hypothèses du lemme 1.4 avec les constantes  $K_1$  et  $K_2$ ;

(b)  $b_k(t) = d_k(t)$  sauf sur un ensemble de mesure  $\varepsilon_k$ .

Alors les suites  $(d_k^* \otimes e_i^*)_{i \geq 1, k \geq 2}$  et  $(d_k / \mu(Sd_k) \otimes e_i^*)_{i \geq 1, k \geq 2}$  sont équivalentes dans  $L^q(I_s)$ .

DEMONSTRATION. Posons  $\zeta_k = d_k / \mu(S(d_k))$ . On sait que la suite  $(d_k^* \otimes e_i^*)$  est inconditionnelle dans  $U_0^*$ , donc aussi dans  $L^q(I_s)$  car  $U_0^*$  se plonge isométriquement dans  $L^q(I_s)$ . Soit  $\alpha$  la constante d'inconditionnalité.  $d_k$  est un élément de  $L^q(K, \mathcal{A})$  donc

$$\zeta_k = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_{kl} d_l^*$$

avec

$$\lambda_{kl} = \int \frac{d_l(t) d_k(t)}{\mu(Sd_k)} dt.$$

On a

$$\lambda_{ll} = 1.$$

Pour  $k \neq l$ , on a

$$\lambda_{kl} = \frac{1}{\mu(S(d_k))} [\langle d_l - b_l, d_k - b_k \rangle + \langle b_l, d_k - b_k \rangle + \langle b_k, d_l - b_l \rangle].$$

On voit facilement que  $|\lambda_{kl}| \leq 3 \inf(\varepsilon_k, \varepsilon_l) / \mu(S(d_k))$  donc

$$\begin{aligned}\|\zeta_k - d_k^*\| &= \left\| \sum_{l=1}^{\infty} (\lambda_{kl} - \delta_{kl}) d_l^* \right\| \\ &\leq \frac{3}{\mu(S(d_k))} \sum_{l=1}^{\infty} \inf(\varepsilon_k, \varepsilon_l) \|d_l^*\|.\end{aligned}$$

On peut choisir par récurrence des nombres  $\varepsilon_1 = 1 > \varepsilon_2 > \dots$  tels que

$$\|\zeta_k - d_k^*\|_{L^q} \leq \frac{\|d_k^*\|}{2^k \alpha}.$$

Ce choix est possible et ne dépend que de  $K_1$  et  $K_2$  car  $\|d_l^*\|$  et  $\mu(S(d_k))$  sont évalués en fonction de  $K_1$  et  $K_2$ . Si  $(x_k^*)_{k \geq 2}$  est une suite de  $l_i$  on pose

$$\varphi = \sum_{k \geq 2} d_k^* \otimes x_k^* \quad \text{et} \quad \psi = \sum_{k \geq 2} \zeta_k \otimes x_k^*$$

alors

$$\|x_k^*\| \leq \frac{\alpha \|\varphi\|}{\|d_k^*\|}$$

et par conséquent

$$\|\varphi - \psi\|_{L^q(l_i)} \leq \sum_{k \geq 2} \frac{\|\varphi\|}{2^k} \leq \frac{1}{2} \|\varphi\|.$$

On a donc

$$\|\varphi\| \approx \|\psi\|.$$

Ceci démontre l'équivalence des deux suites.

C.Q.F.D.

REMARQUE. Ce lemme exprime que les  $(d_k)$  sont presque orthogonales.

LEMME 1.6. Soient  $K_1$  et  $K_2$  fixés et  $(b_k)_{k \geq 2}$  une suite comme au lemme 1.5. Il existe des nombres positifs  $(\varepsilon_{k,i})_{i \geq 1, k \geq 2}$  tels que si  $(b_k^i)_{i \geq 1, k \geq 2}$  est une famille de suites bloc de la base de Haar telles que  $|b_k^i(t)| = |d_k(t)|$  sauf sur un ensemble de mesure  $\varepsilon_{k,i}$ , alors l'espace  $Z_1 = [b_k^i \otimes e_i]_{i \geq 1, k \geq 2}$  est isomorphe à  $L^p(I)$  et complété.

DÉMONSTRATION. On va d'abord montrer que les suites  $(b_k^i \otimes e_i)$  et  $(d_k \otimes e_i)$  sont équivalentes. On impose d'abord  $\varepsilon_{ki}$  assez petit pour que

$$\frac{1}{2} \mu(S(d_k)) \leq \mu(S(b_k^i)) \leq 2\mu(Sd_k).$$

On montre facilement que, si  $k = 2^n + m$ :

$$\|b_k^i\|_{L^q} \leq \frac{2^{(n+1)/p}}{K_1^{1/p}} \quad \text{et} \quad \|d_k^*\|_{L^q} \leq \frac{2^{n/p}}{K_1^{1/p}}.$$

Comme  $\|d_k\|_\infty = \|b_k^i\|_\infty = 1$ , on peut appliquer le corollaire I.2 et si on a

$$\sum_{i \geq 1} \sum_{k \geq 2} \varepsilon_{ki}^{1/p} (\|b_k^{i*}\|_{L^q} + \|d_k^*\|_{L^q}) < 1,$$

alors les espaces  $Z_1$  et  $U_1$  ont des bases équivalentes et sont donc isomorphes. La remarque qui suit le lemme I.4 montre que  $Z_1$  est isomorphe à  $L^p(l_r)$ .

L'espace  $Z_1^*$  est engendré par les restrictions à  $Z_1$  des formes linéaires définies par  $(b_k^{i*} \otimes e_i^*)_{i \geq 1, k \geq 2}$ . Nous allons montrer que l'injection canonique de  $Z_1^*$  dans  $L^q(l_r)$  est continue. La transposée de cette injection nous donnera une projection continue de  $L^p(l_r)$  sur  $Z_1$ .

Pour cela, nous allons montrer que les suites  $(b_k^{i*} \otimes e_i^*)$  et  $(d_k^* \otimes e_i^*)$  sont équivalentes dans  $L^q(l_r)$ . On sait déjà d'après le lemme I.5 que  $(d_k^* \otimes e_i^*)$  est équivalente à  $(\zeta_k \otimes e_i^*)$ , où  $\zeta_k = d_k / \mu(Sd_k)$ . Cette dernière suite est donc basique inconditionnelle dans  $L^q(l_r)$ . D'autre part  $b_k^{i*} = b_k^i / \mu(Sb_k^i)$ , donc la suite  $(b_k^{i*} \otimes e_i^*)$  est une suite bloc de la base de  $L^q(l_r)$  et est donc aussi inconditionnelle. On a  $|b_k^{i*}(t)| = \lambda_{ki} |\zeta_k(t)|$  sauf sur un ensemble de mesure  $\varepsilon_{ki}$  avec

$$\lambda_{ki} = \frac{\mu(S(d_k))}{\mu(S(b_k^i))} \quad \text{donc } |1 - \lambda_{ki}| \leq \frac{2\varepsilon_{k,i}}{\mu(S(d_k))} \leq \frac{2^{n+1}}{K_1} \varepsilon_{k,i}.$$

On peut choisir  $\varepsilon_{ki}$  de façon que

$$\sum_k \sum_i \varepsilon_{ki}^{1/q} (\|b_k^{i*}\|_{L^\infty} \|b_k^i\| + \|\zeta_k\|_{L^\infty} \|\zeta_k^*\|) + \sum_{k,i} |1 - \lambda_{ki}| < 1,$$

alors d'après le corollaire I.2, on a l'équivalence des deux suites  $(b_k^{i*} \otimes e_i^*)$  et  $(\zeta_k \otimes e_i^*)$  dans  $L^q(l_r)$ .

On en déduit l'équivalence de  $(b_k^{i*} \otimes e_i^*)$  et  $(d_k^* \otimes e_i^*)$ . Soit

$$\eta = \sum_{i \geq 1} \sum_{k \geq 2} \alpha_{ki} b_k^{i*} \otimes e_i^*,$$

$$\varphi = \sum_{i \geq 1} \sum_{k \geq 2} \alpha_{ki} d_k^* \otimes e_i^*,$$

on a

$$\|\varphi\|_{L^q(l_r)} \approx \|\eta\|_{L^q(l_r)}.$$

Mais d'après la première partie de la démonstration les suites  $(b_k^i \otimes e_i)$  et  $(d_k \otimes e_i)$  sont équivalentes donc

$$\|\eta\|_{Z_1^*} \approx \|\varphi\|_{U_1^*}.$$

Enfin nous avons vu dans la remarque qui suit le lemme I.4 que

$$\|\varphi\|_{U_1^*} \approx \|\varphi\|_{L^q(l_r)}.$$



On en déduit alors

$$\|\eta\|_{L_q(l_s)} \approx \|\eta\|_{Z_1}.$$

Ceci nous montre que l'injection de  $Z_1^*$  dans  $L^q(l_s)$  est continue. C.Q.F.D.

Nous fixons  $K_2 = 2\mu(K)$  et  $K_1 = \mu(K)/2$ . Nous allons construire une suite  $(b_k)_{k \geq 1}$  qui vérifient les conditions du lemme I.5 pour ces valeurs de  $K_1$  et  $K_2$ . Pour chaque  $i$  nous construirons alors une suite  $(b_k^i)_{k \geq 2}$ , bloc de  $(h_j)_{j \in \Phi_i}$ , qui vérifie les conditions du lemme I.6. En appliquant ce lemme nous aurons donc montré qu'il existe dans  $Z_1$  un sous-espace complémenté isomorphe à  $L^p(l_s)$ .

*Construction de  $(b_k)_{k \geq 2}$  et  $(b_k^i)_{k \geq 2, i \geq 1}$*

*Première étape:  $i = 1$ .* Nous allons construire  $(b_k^1)$  et  $(b_k)$ . Pour chaque  $t$  dans  $K$  on peut construire une suite strictement croissante  $n_1(t) < n_2(t) < \dots < n_j(t) < \dots$  telle que  $n_j(t) = k$  si  $k$  est le  $j$ -ième indice dans  $\Phi_1$  tel que  $h_k(t) \neq 0$ . Soit  $\psi'_j = \{n_j(t)/t \in K\}$ . On voit facilement que  $\psi'_j \cap \psi'_i = \emptyset$  si  $i \neq j$ . On considère une sous-suite  $\psi_1$  et  $\psi'_1$  telle que  $\{h_k\}_{k \in \psi_1}$  soit une famille maximale à support disjoint dans  $\{h_k\}_{k \in \psi'_1}$ . Pour tout  $i_0$  dans  $\psi_1$  on définit de même  $\psi_2, i_0$ , sous-suite de  $\psi'_2$ , telle que  $\{h_k\}_{k \in \psi_2, i_0}$  soit une famille maximale à support disjoint dans  $\{h_k/k \in \psi'_2, S(h_k) \subset S(h_{i_0})\}$ . On pose  $\psi_2 = \bigcup_{i_0 \in \psi_1} \psi_2, i_0$ . On définit ainsi des familles disjointes  $\psi_n$ , telles que pour  $i \in \psi_n$ , il existe  $j \in \psi_{n-1}$  tel que  $S(h_i) \subset S(h_j)$ . Posons  $K_n = \bigcup_{j \in \psi_n} S(h_j)$ , il est facile de voir que  $\bigcap K_n = K$ . Si on se donne une suite de nombres  $(\delta_{n,1})_{n \geq 0}$  positifs, on peut extraire une sous-suite  $l(n)$  telle que

$$\mu(K_{l(n)} \setminus K) < \delta_{n,1}.$$

Posons alors

$$b_2 = \sum_{j \in \psi_{l(0)}} h_j.$$

Supposons définis les  $b_k$  pour  $k \leq 2^n$ , on posera alors

$$b_{2^n + (2m-1)} = \sum_{\substack{k \in \psi_{l(n)} \\ S(h_k) \subset S(b_{2^{n-1} + m})}} h_j,$$

$$b_{2^n + 2m} = \sum_{\substack{k \in \psi_{l(n)} \\ S(h_k) \subset S(b_{2^{n-1} + m})}} h_j.$$

Il faut montrer que la suite  $d_1 = \Pi_K$  et  $d_k = \Pi_K \cdot b_k$  pour  $k \geq 2$  vérifie les conditions du lemme I.5.

Un calcul tout à fait analogue à celui de Gamlen et Gaudet [2], montre que les conditions de ce lemme sont réalisées avec  $K_2 = 2\mu(K)$  et  $K_1 = \mu(K)/2$  pourvu que la suite  $(\delta_{n,1})_{n \geq 0}$  soit bien choisie.

2ème étape: Construction de  $b_k^i$ . Si on impose  $\delta_{n+1} < \varepsilon_{k+1} \forall k = 2^n + 1, \dots, 2^{n+1}$  alors on peut poser  $b_k^1 = b_k$ .

Fixons  $i > 1$ . On peut alors définir comme précédemment une suite  $(\Psi_n)$  de sous-suites de  $\Phi_i$ , et si  $K_n = \bigcup_{j \in \Psi_n} S(h_j)$ , on aura de même  $\bigcap K_n = K$ .

Donnons-nous, pour  $i$  fixé, une suite  $\delta_{n,i} > 0$ . On peut extraire une suite  $l(n)$  telle que  $\mu(K_{l(n)} \setminus K) < \delta_{n,i}$ . On posera alors

$$b_k^i = \sum_{\substack{j \in \Psi_{l(n)} \\ S(h_j) \subset S(b_k)}} h_j.$$

Il est facile de voir que l'on obtient ainsi une suite bloc de  $(h_j)_{j \in \Phi_i}$ . Nous allons montrer que si la suite  $l(n)$  est bien choisie, alors on a  $|b_k^i(t)| = |d_k(t)|$  sauf sur un ensemble de mesure  $\varepsilon_{k,i}$ . Comme  $S(b_k^i) \subset S(b_k)$ , il est clair que  $|b_k^i(t)| = |b_k(t)|$  sauf sur  $S(b_k) \setminus S(b_k^i)$ .

Considérons une somme finie  $\hat{b}_k$  de la somme définissant  $b_k$ , telle que  $S(\hat{b}_k) \subset S(b_k)$  et  $\mu(S(b_k) \setminus S(\hat{b}_k)) < \delta_{n,i}$  pour  $k = 2^n + m$ . Je choisis alors  $l(n)$  assez grand pour que l'on ait la propriété suivante: si  $j \in \Psi_{l(n)}$  et  $S(h_j)$  rencontre  $S(\hat{b}_k)$ , alors  $S(h_j) \subset S(\hat{b}_k)$  et ceci pour tout  $k = 2^n + 1, 2^n + 2, \dots, 2^{n+1}$ .

Il est clair alors que  $K \cap S(\hat{b}_k) \subset S(b_k^i) \subset S(b_k)$ , donc pour  $t \in K$  on aura  $|b_k^i(t)| \neq |d_k(t)|$  seulement si  $t \in S(b_k) \setminus S(\hat{b}_k)$ , et pour  $t \notin K$  on aura  $|b_k^i(t)| \neq |d_k(t)|$  seulement si  $t \in S(b_k^i) \setminus K$ . La réunion de ces deux ensembles est de mesure inférieure à  $2\delta_{n,i}$ . Il suffit donc de choisir  $2\delta_{n,i} < \varepsilon_{n,i}$ .

La construction est donc possible et ceci achève la démonstration du théorème I.3 dans l'hypothèse (1).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME I.3 DANS L'HYPOTHÈSE (2). Nous gardons les mêmes notations et supposons maintenant que pour toute partie infinie  $M$  de  $\mathbb{N}$  on a

$$\bigcap_{i \in M} \hat{\Phi}_i^C = \emptyset \quad \text{p.s.}$$

Donc pour tout entier  $k$ ,  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \hat{\Phi}_i = [0, 1]$  p.s. On peut construire une suite  $(P_n)$  d'entiers telle que si  $B_n = \bigcup_{i=P_n+1}^{P_{n+1}} \hat{\Phi}_i$ , alors  $\mu(B_n) > 1 - 1/4^n$ . Fixons  $n$  et posons  $B_{ni} = \hat{\Phi}_i / \bigcup_{P_n < j < i} \hat{\Phi}_j$ ,  $i = P_n + 1, \dots, P_{n+1}$ . Les  $B_{ni}$  sont deux-à-deux disjoints et  $\bigcup_{i=P_n+1}^{P_{n+1}} B_{ni} = B_n$ . On peut donc trouver des compacts  $C_{n,i} \subset B_{n,i}$  tels que  $C_n = \bigcup_{i=P_n+1}^{P_{n+1}} C_{n,i}$  soit de mesure  $> 1 - 1/4^n$ . Pour  $n$  fixé, la famille des compacts  $C_{n,i}$  est finie et disjointe, donc leur distance respective est minorée par un nombre  $\varepsilon_n > 0$ . Posons alors pour  $P_n < i \leq P_{n+1}$ :

$$\Phi'_i = \{k \in \Phi_i / S(h_k) \text{ rencontre } C_{ni} \text{ et } \mu(S(h_k)) < \varepsilon_n/2\}.$$

Il est clair que  $\Phi'_i \supset C_{n,i}$  et de plus si  $k \in \Phi'_i$ ,  $l \in \Phi'_j$  alors

$$S(h_k) \cap S(h_l) = \emptyset.$$

Posons alors  $\Psi_n = \bigcup_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} \Phi'_i$ . Nous allons montrer que  $Z$  contient un sous-espace complémenté isomorphe à l'espace  $Y = [h_k \otimes e_n]_{n \geq 1, k \in \Psi_n}$ . Comme  $\hat{\Psi}_n$  contient  $C_n$  et que  $\mu(\bigcap_n C_n) > 0$  on sait que  $Y$  est isomorphe à  $L^p(l)$ . Le théorème sera donc démontré. Considérons  $Z_0 = [h_k \otimes e_i]_{i \in \mathbb{N}, k \in \Phi'_i} = [E_n]_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $E_n = [h_k \otimes e_i]_{p_n < i \leq p_{n+1}, k \in \Phi'_i}$ . Or il est facile de voir que si  $f_n$  est dans  $E_n$  on a

$$\left\| \sum_n f_n(t) \right\|_l^p = \left( \sum_n \|f_n(t)\|_l^r \right)^{p/r}.$$

D'autre part, on a

$$\|f_n(t)\|_l = |\langle f_n(t); \zeta_n \rangle| \quad \text{où } \zeta_n = e_{p_n+1}^* + \dots + e_{p_{n+1}}^*.$$

$Z_0$  est donc isométrique à l'espace engendré par les fonctions de la forme  $\langle f_n(t), \zeta_n \rangle \otimes e_n$ , où  $f_n \in E_n$ . Mais pour  $n$  fixé:

$$[\langle f_n(\cdot), \zeta_n \rangle / f_n \in E_n] = [h_k / k \in \Psi_n].$$

Donc  $Z_0$  est isométrique à  $Y$ . On sait que  $Z_0$  est complémenté dans  $L^p(l)$  car c'est un espace engendré par une sous-suite de la base.

Ceci achève la démonstration du théorème I.3.

## II. Primarité de $L^p(l)$

Nous allons utiliser une méthode semblable celle de [1] pour démontrer que  $L^p$  est primaire.

**PROPOSITION II.1.** *Les espaces  $L^p(l)$  et  $L^p((\bigoplus l_2)_l)$  sont isomorphes.*

**DÉMONSTRATION.** Le premier est isométrique à un sous-espace complémenté du second, il nous suffit de montrer que le second est isomorphe à un sous-espace complémenté de  $L^p([0, 1]^2, l)$ . Soit  $F \in L^p((\bigoplus l_2)_l)$ ,  $F = (F_n)_{n \geq 1}$ ,  $F_n(t) \in l_2$  et  $F_n(t) = (f_k^{(n)}(t))_{k \geq 1}$ . On a

$$\|F\|^p = \int \|F(t)\|^p dt,$$

$$\|F\|^p = \int \left( \sum_n \left( \sum_k f_k^{(n)}(t)^2 \right)^{r/2} \right)^{p/r} dt.$$

Considérons l'opérateur  $T : L^p((\otimes I_2)_I) \rightarrow L^p([0, 1]^2, I)$  défini par

$$(TF)(t, u) = (g_n(t, u))_{n \geq 1}$$

avec

$$g_n(t, u) = \sum_k f_k^{(n)}(t) \varepsilon_k(u),$$

$\varepsilon_k(\cdot)$  désigne la  $k$ -ième fonction de Rademacher. On a

$$\|TF\|^p = \int \int \|TF(t, u)\|_I^p dt du.$$

Posons

$$\varphi_k(t) = (f_k^n(t))_{n \geq 1}$$

alors

$$TF(t, u) = \sum_k \varphi_k(t) \varepsilon_k(u).$$

D'après les inégalités de Kahane on a

$$\int \left\| \sum_k \varphi_k(t) \varepsilon_k(u) \right\|_I^p du \approx \left( \int \left\| \sum_k \varphi_k(t) \varepsilon_k(u) \right\|_I^r du \right)^{p/r}.$$

On en tire

$$\|TF\|^p \approx \int dt \left[ \sum_n \left| \sum_k f_k^{(n)}(t) \varepsilon_k(u) \right|^r du \right]^{p/r}.$$

En utilisant maintenant les inégalités de Khintchine on a

$$\|TF\|^p \approx \int \left( \sum_n \left( \sum_k f_k^{(n)}(t)^2 \right)^{r/2} \right)^{p/r} dt = \|F\|^p.$$

$T$  est donc un isomorphisme sur son image qui est l'espace  $Z$  engendré par les fonctions de la forme  $\varphi_k(t) \otimes \varepsilon_k(u)$  où  $\varphi_k$  est à valeurs dans  $I$ , et  $\varepsilon_k$  la  $k$ -ième fonction de Rademacher. Il reste à montrer que cet espace est complété dans  $L^p([0, 1]^2, I)$ . On définit un opérateur de  $L^p([0, 1]^2, I)$  dans  $Z$  en posant

$$(Qf)(t, u) = \sum_k \langle f(t, \cdot), \varepsilon_k(\cdot) \rangle \varepsilon_k(u)$$

où

$$\langle f(t, \cdot), \varepsilon_k(\cdot) \rangle = \int f_k(t, s) \varepsilon_k(s) ds.$$

Il faut montrer que  $Q$  est une projection bornée sur  $Z$ . Il est facile de voir que  $Q|_Z = \text{id}_Z$  car si

$$f(t, u) = \varphi_{k_0}(t) \varepsilon_{k_0}(u),$$

$$\langle f(t, \cdot), \varepsilon_k(\cdot) \rangle = \delta_{k, k_0} \varphi_{k_0}(t).$$

D'autre part

$$Qf(t, u) = \sum_k \varphi_k(t) \varepsilon_k(u)$$

où

$$\varphi_k(t) = (\varphi_k^n(t))_{n \geq 1},$$

$$\varphi_k^n(t) = \langle f^n(t, \cdot), \varepsilon_k(\cdot) \rangle.$$

D'après le calcul fait dans la première partie de la démonstration, on a

$$\|Qf\|^p \approx \int \left( \sum_n \left( \sum_k \varphi_k^n(t)^2 \right)^{r/2} \right)^{p/r} dt.$$

Désignons par  $P$  la projection orthogonale sur la suite de Rademacher. Pour tout  $t$  fixé on a

$$\|Pf^n(t, \cdot)\|_{L^2} = \left[ \sum_k \varphi_k^n(t)^2 \right]^{1/2}.$$

Or on sait que

$$\|Pf^n(t, \cdot)\|_{L^2} \approx \|Pf^n(t, \cdot)\|_{L^r} \leq K \|f^n(t, \cdot)\|_{L^r},$$

puisque cette projection est bornée dans  $L^r$ , si  $r > 1$ . On a donc

$$\begin{aligned} \left( \sum_k \varphi_k^n(t)^2 \right)^{r/2} &\leq K^r \int |f^n(t, u)|^r du, \\ \|Qf\|^p &\leq K^r \int dt \left[ \sum_n \int |f^n(t, u)|^r du \right]^{p/r} \\ &\leq K^r \int dt \left[ \int \|f(t, u)\|_r^r du \right]^{p/r}. \end{aligned}$$

Supposons  $p \geq r$  alors  $\| \cdot \|_{L^r} \leq \| \cdot \|_{L^p}$  donc

$$\|Qf\|^p \leq K^r \int dt \int \|f(t, u)\|_r^p du = K^r \|f\|^p.$$

Pour tout  $p \geq r$  nous avons montré que  $Z$  est complété dans  $L^p([0, 1]^2, l_r)$  et par conséquent la proposition est vraie pour  $p \geq r > 1$ . En passant aux duaux, on voit qu'elle est vraie pour  $1 < p \leq r$ .

PROPOSITION II.2. La base naturelle  $(h_k \otimes e_j^i)$  de  $L^p((\oplus l_2)_{l_r})$  est une base inconditionnelle.

LEMME II.3. Soit  $x_k \in (\oplus l_2)_{l_r}$  telle que  $\sum_k h_k \otimes x_k$  converge, alors cette série converge inconditionnellement.

DÉMONSTRATION. D'après la remarque faite par Pisier [3], il suffit de le démontrer lorsque  $p = r$ . Posons

$$x_k = \sum_i \left( \sum_j \lambda_{ijk} e_j^i \right),$$

où  $(e_j^i)_{j \geq 1}$  est la base de  $l_2$ .

On a

$$\left\| \sum_k h_k(t) x_k \right\|_{(\oplus l_2)_p}^p = \sum_i \left( \sum_j \left( \sum_k \lambda_{ijk} h_k(t) \right)^2 \right)^{p/2}.$$

Soit

$$\Delta^p = \int \left\| \sum_k h_k(t) x_k \right\|^p dt.$$

On utilise les inégalités de Khintchine:

$$\begin{aligned} \Delta^p &\approx \int \sum_i \int \left| \sum_{j,k} \lambda_{ijk} h_k(t) \varepsilon_j(u) \right|^p dt du \\ &\approx \sum_i \int \int \left| \sum_k h_k(t) g_{k,i}(u) \right|^p dt du, \end{aligned}$$

où

$$g_{k,i}(u) = \sum_j \lambda_{ijk} \varepsilon_j(u).$$

Mais la base de Haar est inconditionnelle et par conséquent

$$\Delta^p \approx \sum_i \int \int \left| \sum_k \pm h_k(t) g_{k,i}(u) \right|^p dt du,$$

$$\Delta^p \approx \left\| \sum_k \pm h_k \otimes x_k \right\|^p.$$

C.Q.F.D.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Nous allons donner une expression équivalente de la norme  $\Delta$  qui montrera qu'elle ne dépend que du carré de  $\lambda_{ijk}$

$$\Delta^p = \int \left\| \sum_k h_k(t) x_k \right\|_{(\oplus l_2)_{l_r}}^p dt.$$

D'après le lemme II.3 on a

$$\Delta^p \approx \iint \left\| \sum_k \varepsilon_k(u) h_k(t) x_k \right\|^p dt du.$$

Fixons maintenant  $t$ , si on applique les inégalités de Kahane on a

$$E = \int \left\| \sum_k \varepsilon_k(u) h_k(t) x_k \right\|^p du \approx \left[ \int \left\| \sum_k \varepsilon_k(u) h_k(t) x_k \right\|^r du \right]^{p/r},$$

$$E^{r/p} \approx \int \sum_i \left( \sum_j \left( \sum_k \varepsilon_k(u) h_k(t) \lambda_{ijk} \right)^2 \right)^{r/2} du.$$

On utilise à nouveau les inégalités de Khintchine

$$E^{r/p} \approx \iint \sum_i \left| \sum_{j,k} \varepsilon_j(s) \varepsilon_k(u) h_k(t) \lambda_{ijk} \right|^r duds.$$

Il est alors facile de vérifier que

$$E^{r/p} \approx \sum_i \left( \sum_{j,k} \lambda_{ijk}^2 h_k^2(t) \right)^{r/2},$$

donc

$$\Delta^p \approx \int \left[ \sum_i \left( \sum_{j,k} \lambda_{ijk}^2 h_k^2(t) \right)^{r/2} \right]^{p/r} dt. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème principal.

**THÉORÈME II.4.** *L'espace  $L^p(l_r)$  est primaire si  $p$  et  $r \in ]1, +\infty[$ .*

**DÉMONSTRATION.** D'après la proposition II.1 il suffit de montrer que si  $P$  est une projection de  $L^p((\oplus l_2)_t) = Y$ , alors l'un des deux espaces  $PY$  ou  $(I - P)(Y)$  contient un sous-espace complémenté isomorphe à  $L^p(l)$ .

Nous considérons la base naturelle de  $Y$

$$h_k^{ij} = h_k \otimes e_j^i \quad \text{où } e_j^i = (0, 0, \dots, e_j, 0, \dots),$$

le vecteur  $e_j$  étant écrit à la  $i$ -ième place.

$(h_k^i)^*$  désigne la suite biorthogonale et  $P$  une projection de  $Y$ . Posons

$$\Phi_i = \left\{ k \mid |\langle h_k^{ij*}, Ph_k^{ij} \rangle| \geq \frac{1}{2} \text{ pour une infinité d'indices } j \right\},$$

$$\Psi_i = \left\{ k \mid |\langle h_k^{ij*}, (I - P)h_k^{ij} \rangle| \geq \frac{1}{2} \text{ pour une infinité d'indices } j \right\}.$$

$\Phi_i \cup \Psi_i = [0, 1]$  pour tout  $i$ . Deux cas peuvent alors se produire:

— ou bien l'une des deux suites  $(\Phi_i)$  ou  $(\Psi_i)$  vérifient l'hypothèse (1) du théorème I.2;

— ou bien ni l'une, ni l'autre ne la vérifie, mais alors  $(\Phi_i)$  vérifie l'hypothèse (2) car  $\Phi_i^c \subset \Psi_i$ .

Supposons donc que  $(\Phi_i)$  vérifie l'une des hypothèses du théorème I.3. Soit  $\Omega = \{k, i / i \in \mathbb{N}, k \in \Phi_i\}$ ; cet ensemble est en bijection avec  $\mathbb{N}$ . Comme d'autre part pour tout  $i$  et  $k$  fixés,  $h_k^{ij}$  tend vers 0 faiblement, on peut construire des indices  $(j(k, i))_{(k, i) \in \Omega}$  deux-à-deux distincts et tels que

$$(1^\circ) \quad |\langle h_k^{ij(k, i)*}, Ph_k^{ij(k, i)} \rangle| \geq \frac{1}{2} \quad \forall (k, i) \in \Omega.$$

(2°) Il existe des blocs  $y_{k, i}$  de la base tels que

$$\|Ph_k^{ij(k, i)} - y_{k, i}\| < \frac{\delta}{2^{k+i+1}},$$

où  $\delta$  est un nombre fixé.

On peut alors appliquer le lemme 1 de [1] si  $\delta$  a été choisi assez petit et on en conclut:

(1°) La suite  $\{Ph_k^{ij(k, i)}\}_{(k, i) \in \Omega}$  est équivalente à  $\{h_k^{ij(k, i)}\}_{(k, i) \in \Omega}$ .

(2°) L'espace qu'elle engendre est complété dans  $L^p((\oplus l_2)_l)$ .

Il nous suffit donc de montrer que l'espace engendré par la suite  $\{h_k^{ij(k, i)}\}_{(k, i) \in \Omega}$  est isomorphe à  $L^p(l)$ . Soit

$$\Delta = \sum_{(k, i) \in \Omega} \lambda_{k, i} h_k \otimes e_{j(k, i)}^i,$$

$$\|\Delta(t)\|^r = \sum_i \left( \sum_n \left( \sum_{k \in B_{n, i}} \lambda_{k, i} h_k(t) \right)^2 \right)^{r/2},$$

où  $B_{n, i} = \{k / j(k, i) = n\}$ .

Par construction  $B_{n, i}$  a au plus un élément et on a donc

$$\left( \sum_{k \in B_{n, i}} \lambda_{k, i} h_k(t) \right)^2 = \sum_{k \in B_{n, i}} \lambda_{k, i}^2 h_k^2(t),$$

$$\|\Delta(t)\|^r = \sum_i \left( \sum_k \lambda_{k, i}^2 h_k^2(t) \right)^{r/2},$$

$$\|\Delta\|^p = \int \|\Delta(t)\|^p dt = \int \left[ \sum_i \left( \sum_k \lambda_{k, i}^2 h_k^2(t) \right)^{r/2} \right]^{p/r} dt.$$

Le lemme I.1 nous montre que la suite est équivalente à la suite  $\{h_k \otimes e_i\}_{i \in \mathbb{N}, k \in \Phi_i}$ .



dans  $L^p(I)$ . Comme  $(\Phi_i)$  vérifie les hypothèses du théorème 1.3, l'espace engendré est bien isomorphe à  $L^p(I_r)$ . Ceci achève la démonstration.

### III. Primarité de $l_p(L')$ pour $p \geq 1$ et $r > 1$

Dans ce paragraphe nous démontrerons que les espaces  $l_p(L')$  sont primaires pour  $1 \leq p < +\infty$  et  $r > 1$ , et aussi l'espace  $c_0(L')$ . Si  $(h_k)$  est la base de Haar de  $L'$ , alors la suite  $h_k^i = (0, 0, \dots, 0, h_k, 0, \dots)$ , où  $h_k$  est écrit à la  $i$ -ème place, est une base inconditionnelle de  $Y = l_p(L')$ . Cela résulte immédiatement du fait que la suite  $(h_k)$  est une base inconditionnelle de  $L'$  et de la définition de la norme de  $Y$ .

Nous allons d'abord étudier l'espace engendré par une sous-suite de la base,  $(h_k^i)_{i \in \mathbb{N}, k \in \Phi_i}$ . Nous gardons les mêmes notations qu'aux paragraphes précédents.

**PROPOSITION III.1.** *S'il existe  $\varepsilon > 0$ , et une partie infinie  $I$  de  $\mathbb{N}$  telle que  $\mu(\Phi_i) \geq \varepsilon$  pour tout  $i$  dans  $I$ , alors l'espace engendré par la sous-suite  $(h_k^i)_{i \in \mathbb{N}, k \in \Phi_i}$  est isomorphe à  $l_p(L')$ .*

**DÉMONSTRATION.** Si on désigne par  $Z$  cet espace, il est complété dans  $Y$  et en utilisant la méthode de décomposition de Pełczyński, il suffit de montrer que  $Z$  contient un sous-espace complété isomorphe à  $l_p(L')$ . On peut donc supposer que  $I = \mathbb{N}$ .

Si on regarde la démonstration de [2] on voit que pour chaque  $i$  il existe un isomorphisme entre  $L'$  et l'espace engendré par la suite  $(h_k)_{k \in \Phi_i}$ , et en outre on peut construire un isomorphisme  $T_i$  tel que  $\|T_i\| \|T_i^{-1}\|$  ne dépend que de  $\mu(\Phi_i)$ .

Supposons donc construit une telle famille d'isomorphismes avec

$$\|T_i^{-1}\| \leq \varphi(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \|T_i\| = 1.$$

On définit alors un opérateur de  $l_p(L')$  sur  $Z$  en posant

$$Tf = (T_i f_i)_{i \in \mathbb{N}} \quad \text{si} \quad f = (f_i)_{i \in \mathbb{N}},$$

$$\|Tf\|^p = \sum_i \|T_i f_i\|_{L'}^p \leq \sum_i \|T_i\|^p \|f_i\|_{L'}^p \leq \sum_i \|f_i\|_{L'}^p = \|f\|^p,$$

$$\|Tf\| \leq \|f\|.$$

On démontre de même que

$$\|Tf\| \geq \frac{1}{\varphi(\varepsilon)} \|f\|.$$

Il est facile de voir que l'image de  $T$  est  $Z$  tout entier, donc  $Z$  est isomorphe à  $l_p(L')$ .

**THÉOREME III.2.** *Les espaces  $c_0(L')$  et  $l_p(L')$  sont primaires, pour  $1 < r < +\infty$  et  $1 \leq p < \infty$ .*

**DÉMONSTRATION.** Comme  $L'$  est isomorphe à  $L'(l_2)$  pour  $r > 1$ , on a un isomorphisme entre  $l_p(L')$  et  $l_p(L'(l_2))$ . Je fais la démonstration dans le cas de  $l_p$ . Elle serait analogue pour  $c_0(L')$ . Soit  $Y = l_p(L'(l_2))$  et  $P$  une projection de  $Y$  dans lui-même. Il suffit de montrer que  $PY$  où  $(I - P)(Y)$  contient un sous-espace complémenté isomorphe à  $l_p(L')$ . Soit  $(h_{k,j}^i)$  la base naturelle de  $Y$

$$h_{k,j}^i = (0, \dots, 0, h_k \otimes e_j, 0, \dots),$$

où  $h_k \otimes e_j$  est écrit à la  $i$ -ème place.

Pour tout  $i$  posons

$$\Phi_i = \left\{ k \in \mathbb{N} / |\langle h_{k,j}^{i*}, Ph_{k,j}^i \rangle| \geq \frac{1}{2} \text{ pour une infinité de } j \right\},$$

$$\Psi_i = \left\{ k \in \mathbb{N} / |\langle h_{k,j}^{i*}, (I - P)h_{k,j}^i \rangle| \geq \frac{1}{2} \text{ pour une infinité de } j \right\}.$$

Pour chaque  $i$ , on a  $\Phi_i \cup \Psi_i = \mathbb{N}$ . On en déduit facilement que  $\hat{\Phi}_i \cup \hat{\Psi}_i = [0, 1]$  et par conséquent on peut supposer qu'il existe une partie infinie  $I$  de  $\mathbb{N}$  telle que  $\mu(\hat{\Phi}_i) \geq \frac{1}{2}$  pour tout  $i$  dans  $I$ . Sur l'ensemble d'indices  $\Omega = \{(k, i) / i \in I, k \in \Phi_i\}$  on peut mettre un ordre, et en utilisant le fait  $\lim_{j \rightarrow +\infty} h_{k,j}^i = 0$  on peut construire par récurrence des indices  $(j(k, i))_{(k,i) \in \Omega}$ , deux-à-deux distincts tels que

$$(1) |\langle h_{k,j(k,i)}^{i*}, Ph_{k,j(k,i)}^i \rangle| \geq \frac{1}{2}.$$

$$(2) \text{ Il existe une suite bloc } (\mathcal{J}_{k,i}) \text{ telle que}$$

$$\|Ph_{k,j(k,i)}^i - \mathcal{J}_{k,i}\| < \delta/2^{k+i}.$$

Si  $\delta$  est assez petit on peut appliquer le lemme 1 de Alspach, Enflo et Odell [1]; on en déduit que  $PY$  contient un sous-espace complémenté isomorphe à l'espace engendré par la suite  $(h_{k,j(k,i)}^i)_{(k,i) \in \Omega}$ . Or

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{(k,i) \in \Omega} \alpha_{ki} h_{k,j(k,i)}^i \right\|^p &= \sum_i \left\| \sum_k \alpha_{ki} \otimes e_{j(k,i)} \right\|_{L^r(l_2)}^p \\ &= \sum_{i \in I} \left[ \int \left( \sum_n \left( \sum_{k \in B_{i,n}} \alpha_{ki} h_k(t) \right)^2 \right)^{r/2} dt \right]^{p/r}, \end{aligned}$$

où  $B_{i,n} = \{k / j(k, i) = n\}$ .

Par construction  $B_{i,n}$  contient au plus un indice, donc l'expression  $\Delta$  ci-dessus s'écrit encore

$$\begin{aligned}\Delta &= \sum_{i \in I} \left[ \int \left( \sum_n \sum_{k \in B_{i,n}} \alpha_{ki}^2 h_k^2(t) \right)^{r/2} dt \right]^{p/r} \\ &= \sum_{i \in I} \left[ \int \left( \sum_{k \in \Phi_i} \alpha_{ki}^2 h_k^2(t) \right)^{r/2} dt \right]^{p/r}.\end{aligned}$$

En utilisant le lemme I.1, on obtient donc

$$\left\| \sum_{(k,i) \in \Omega} \alpha_{ki} h_{k,j(k,i)}^i \right\|^p \approx \sum_{i \in I} \left\| \sum_{k \in \Phi_i} \alpha_{ki} h_k^i \right\|_{L^r}^p.$$

$PY$  contient donc un sous-espace complémenté isomorphe à l'espace engendré, dans  $l_p(L')$ , par la suite  $(h_k^i)_{i \in I, k \in \Phi_i}$ . D'après la proposition III.1, ce dernier espace est isomorphe à  $l_p(L')$  et ceci achève la démonstration du théorème.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. D. E. Alspach, P. Enflo and E. Odell, *On the structure of separable  $\mathcal{L}_p$  spaces*, Studia Math. **60** (1977).
2. J. L. B. Gamlen and R. J. Gaudet, *On subsequences of the Haar system in  $L^p[0, 1]$ ,  $1 < p < \infty$* , Israel J. Math. **15** (1973), 404–413.
3. B. Maurey, *Système de Haar*, Séminaire Maurey–Schwartz 1974–1975, exposé No. 2.
4. G. Pisier, *Les inégalités de Khintchine–Kahane*, Séminaire Maurey–Schwartz 1977–1978, exposé No. 7.

UNIVERSITÉ DE PARIS — SUD  
91405 ORSAY, PARIS